

△ABC の辺 BC の中点を頂点に持つ内接正三角形問題

△ABC について、BC の中点を D とし、

CA 上に点 E を、AB 上に点 F を、

△DEF が正三角形になるようにとる。

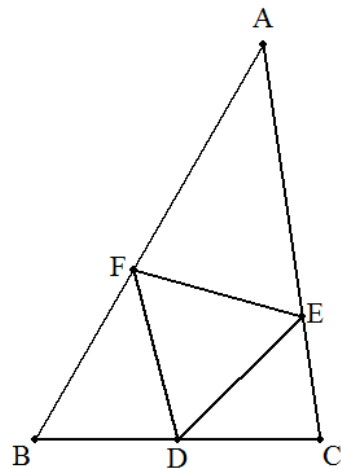
AE = p , EC = q , AF = r , FB = s とおくと、

(1) $3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$ を証明せよ。

(2) 正三角形の 1 辺を p, q, r, s を用いて表せ。

(3) BC を p, q, r, s を用いて表せ。

(4) $\cos A$ の値を p, q, r, s を用いて簡単に表せ。



(解)

(1) 正三角形の 1 辺を x , BC = a とおくと、BD = DC = $\frac{a}{2}$ である。

△AFE と △ABC において ∠A が共通であるから、

$$\cos A = \frac{p^2 + r^2 - x^2}{2pr} = \frac{(p+q)^2 + (r+s)^2 - a^2}{2(p+q)(r+s)} \text{ より}$$

$$(p+q)(r+s)(p^2 + r^2 - x^2) - pr\{(p+q)^2 + (r+s)^2 - a^2\} = 0 \cdots \textcircled{1}$$

△FBA と △ABC において ∠B が共通であるから、

$$\cos B = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} s} = \frac{a^2 + (r+s)^2 - (p+q)^2}{2a(r+s)} \text{ より}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2 - x^2 = \frac{s}{2(r+s)} \{a^2 + (r+s)^2 - (p+q)^2\} \cdots \textcircled{2}$$

△EDC と △ABC において ∠C が共通であるから、

$$\cos C = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} q} = \frac{a^2 + (p+q)^2 - (r+s)^2}{2a(p+q)} \text{ より}$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2 - x^2 = \frac{q}{2(p+q)} \{a^2 + (p+q)^2 - (r+s)^2\} \cdots \textcircled{3}$$

②, ③は x^2 , a^2 についての連立 2 元 1 次方程式である。

②-③から x^2 を消去し、 a^2 について解く。

$$s^2 - q^2 = \left(\frac{s}{2(r+s)} - \frac{q}{2(p+q)} \right) a^2 - \left(\frac{s}{2(r+s)} + \frac{q}{2(p+q)} \right) \{ (p+q)^2 - (r+s)^2 \}$$

$$(ps - qr)a^2 = \{s(p+q) + q(r+s)\} \{ (p+q)^2 - (r+s)^2 \} + 2(p+q)(r+s)(s^2 - q^2) \cdots \textcircled{4}$$

[1] $ps - qr = 0$ のとき

$p:q=r:s$ より $FE \parallel BC$ となり, 4つの三角形 AFE, FBD, DEF, EDC はすべて合同な正三角形となる。

よって, $p=q=r=s$ より, $3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$ は成り立つ。

[2] $ps - qr \neq 0$ のとき, ④から

$$a^2 = \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr} \cdots \textcircled{5}$$

⑤を③に代入して, x^2 について解くと

$$x^2 = \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + qrs^2 - q^3r - qr^3 - pq^2s - pr^2s}{4(ps - qr)} \cdots \textcircled{6}$$

⑤, ⑥を①の左辺に代入すると,

$$\begin{aligned} & (p+q)(r+s) \left\{ p^2 + r^2 - \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + qrs^2 - q^3r - qr^3 - pq^2s - pr^2s}{4(ps - qr)} \right\} \\ & - pr \left\{ (p+q)^2 + (r+s)^2 - \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr} \right\} \\ & = \frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)(3p^2 + q^2 - 3r^2 - s^2)}{4(ps - qr)} \quad (\text{計算省略}) \end{aligned}$$

よって, $\frac{(p+q)(r+s)(ps+qr)(3p^2 + q^2 - 3r^2 - s^2)}{4(ps - qr)} = 0$ より

$$3p^2 + q^2 - 3r^2 - s^2 = 0 \quad \therefore 3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$$

以上[1], [2]より $3p^2 + q^2 = 3r^2 + s^2$ が成立する。

(2) ⑥の分子を s について整理すると

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{ps^3 + qrs^2 + p(p^2 - q^2 - r^2)s + qr(p^2 - q^2 - r^2)}{4(ps - qr)} = \frac{s^2(ps + qr) + (ps + qr)(p^2 - q^2 - r^2)}{4(ps - qr)} \\ &= \frac{(ps + qr)(p^2 - q^2 - r^2 + s^2)}{4(ps - qr)} = \frac{(ps + qr)(p^2 - q^2 - r^2 + 3p^2 + q^2 - 3r^2)}{4(ps - qr)} = \frac{(ps + qr)(4p^2 - 4r^2)}{4(ps - qr)} \\ &= \frac{(ps + qr)(p^2 - r^2)}{ps - qr} \cdots \textcircled{7} \\ &= \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{(ps - qr)(ps + qr)} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{p^2s^2 - q^2r^2} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{p^2(3p^2 + q^2 - 3r^2) - q^2r^2} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{3p^4 + p^2q^2 - 3p^2r^2 - q^2r^2} \\ &= \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{p^2(3p^2 + q^2) - r^2(3p^2 + q^2)} = \frac{(ps + qr)^2(p^2 - r^2)}{(3p^2 + q^2)(p^2 - r^2)} = \frac{(ps + qr)^2}{3p^2 + q^2} \end{aligned}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \frac{ps + qr}{\sqrt{3p^2 + q^2}} \dots (\text{答})$$

(3) ⑤で, $a > 0$ より

$$a = \sqrt{\frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr}} \dots (\text{答})$$

$$(4) \cos A = \frac{p^2 + r^2 - x^2}{2pr} \text{ に, ⑦を代入すると}$$

$$\cos A = \frac{p^2 + r^2 - \frac{(ps + qr)(p^2 - r^2)}{ps - qr}}{2pr} = \frac{rs - pq}{ps - qr} \dots (\text{答})$$

【別解】(2)~(4)

AE の延長上に点 G を $2AE = AG$ と
なるように, AB の延長上に点 H を
 $2AF = AH$ となるようにそれぞれと
る。

図のように AG, AH を 1 辺とする正
三角形 AGI, AHJ を $\triangle ABC$ と重な
らないようにつくる。

$\triangle ACI$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} CI^2 &= AI^2 + AC^2 - 2AI \cdot AC \cos 60^\circ \\ &= (2p)^2 + (p+q)^2 - 2 \cdot 2p(p+q) \times \frac{1}{2} \\ &= 3p^2 + q^2 \end{aligned}$$

同様に, $\triangle ABJ$ に余弦定理を適用すると

$$BJ^2 = AJ^2 + AB^2 - 2AJ \cdot AB \cos 60^\circ = (2r)^2 + (r+s)^2 - 2 \cdot 2r(r+s) \times \frac{1}{2} = 3r^2 + s^2$$

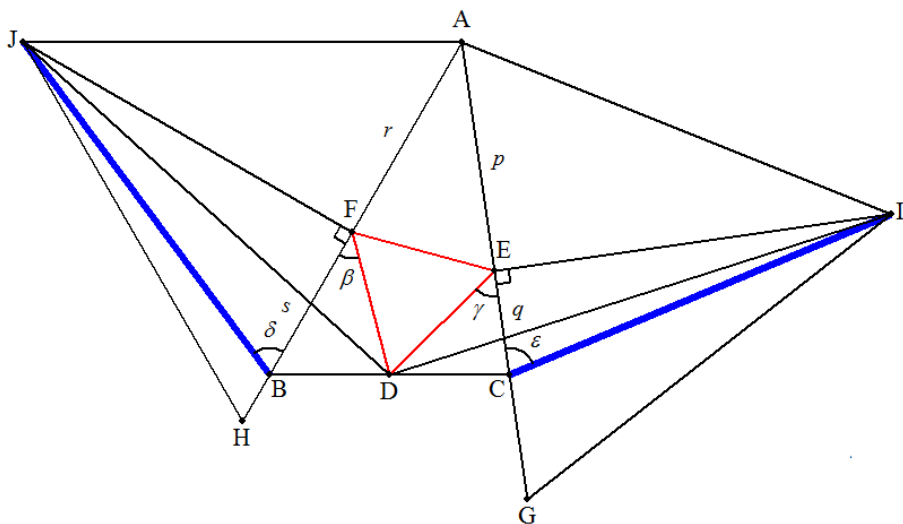
いま, $\angle DFB = \beta$, $\angle DEF = \gamma$, $\angle JAF = \delta$, $\angle ICE = \varepsilon$ とく。

また, $BD = CD = \frac{a}{2}$, 正三角形 DEF の 1 辺を x とおく。

$$\triangle BDF \text{ に正弦定理を適用すると, } \frac{BD}{\sin \beta} = \frac{DF}{\sin B} \text{ より, } \sin \beta = \frac{BD}{DF} \sin B = \frac{a}{2x} \sin B$$

$$\text{同様に, } \triangle CDE \text{ に正弦定理を適用すると, } \frac{DC}{\sin \gamma} = \frac{DE}{\sin C} \text{ より, } \sin \gamma = \frac{DC}{DE} \sin C = \frac{a}{2x} \sin C$$

$\triangle FDJ$ に余弦定理を適用すると, $DJ^2 = FD^2 + FJ^2 - 2FD \cdot FJ \cos(\beta + 90^\circ)$ で, $FJ = \sqrt{3}r$ であるから



$$DJ^2 = x^2 + 3r^2 + 2x \cdot \sqrt{3}r \sin \beta = x^2 + 3r^2 + 2x \cdot \sqrt{3}r \times \frac{a}{2x} \sin B = x^2 + 3r^2 + \sqrt{3}ar \sin B \cdots \textcircled{1}$$

同様に、 $\triangle EDI$ に余弦定理を適用すると、 $DI^2 = ED^2 + EI^2 - 2ED \cdot EI \cos(\gamma + 90^\circ)$ で、 $EI = \sqrt{3}P$ であるから

$$DI^2 = x^2 + 3p^2 + 2x \cdot \sqrt{3}pr \sin \gamma = x^2 + 3p^2 + 2x \cdot \sqrt{3}p \times \frac{a}{2x} \sin C = x^2 + 3p^2 + \sqrt{3}ap \sin C \cdots \textcircled{2}$$

また、 $\triangle DBJ$ において、 $DJ^2 = BD^2 + BJ^2 - 2BD \cdot BJ \cos(\delta + B)$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (3r^2 + s^2) - 2 \cdot \frac{a}{2} BJ (\cos \delta \cos B - \sin \delta \sin B) = \frac{a^2}{4} + 3r^2 + s^2 - as \cos B + \sqrt{3}ar \sin B \cdots \textcircled{3}$$

同様に、 $\triangle DCI$ において、 $DI^2 = CD^2 + CI^2 - 2CD \cdot CI \cos(\varepsilon + C)$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (3p^2 + q^2) - 2 \cdot \frac{a}{2} CI (\cos \varepsilon \cos C - \sin \varepsilon \sin C) = \frac{a^2}{4} + 3p^2 + q^2 - aq \cos C + \sqrt{3}ap \sin C \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{より}, x^2 = \frac{a^2}{4} + s^2 - as \cos B \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{4} \text{より}, x^2 = \frac{a^2}{4} + q^2 - aq \cos C \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} - \textcircled{5} \text{より}, q^2 - s^2 + a(s \cos B - q \cos C) = 0 \cdots \textcircled{7}$$

ここで、 $\cos B = \frac{a^2 + (r+s)^2 - (p+q)^2}{2a(r+s)}$, $\cos C = \frac{a^2 + (p+q)^2 - (r+s)^2}{2a(p+q)}$ を $\textcircled{7}$ に代入すると、

$$q^2 - s^2 + a \left\{ s \times \frac{a^2 + (r+s)^2 - (p+q)^2}{2a(r+s)} - q \times \frac{a^2 + (p+q)^2 - (r+s)^2}{2a(p+q)} \right\} = 0$$

$$\left\{ \frac{s}{2(r+s)} - \frac{q}{2(p+q)} \right\} a^2 = - \frac{s \{ (r+s)^2 - (p+q)^2 \}}{2(r+s)} + \frac{q \{ (p+q)^2 - (r+s)^2 \}}{2(p+q)} - (q^2 - s^2)$$

$$(ps - qr)a^2 = \{s(p+q) + q(r+s)\} \{ (p+q)^2 - (r+s)^2 \} - 2(p+q)(r+s)(q^2 - s^2)$$

[1] $ps - qr = 0$ のとき、

$p : q = r : s$ より $FE \parallel BC$ となり、4つの三角形 AFE, FBD, DEF, EDC はすべて合同な正三角形となる。

よって、 $p = q = r = s$ より、正三角形の1辺 $x = p$, $BC = 2p$, $\cos A = \frac{1}{2}$ ($A = 60^\circ$)

[2] $ps - qr \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{\{s(p+q) + q(r+s)\} \{ (p+q)^2 - (r+s)^2 \} - 2(p+q)(r+s)(q^2 - s^2)}{ps - qr} \\ &= \frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr} \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ より, } a = BC = \sqrt{\frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr}}$$

このとき,

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{(p+q)^2 + (r+s)^2 - a^2}{2(p+q)(r+s)} \\ &= \frac{(p+q)^2 + (r+s)^2 - \frac{\{s(p+q) + q(r+s)\}\{(p+q)^2 - (r+s)^2\} - 2(p+q)(r+s)(q^2 - s^2)}{ps - qr}}{2(p+q)(r+s)} \\ &= \frac{(ps - qr)\{(p+q)^2 + (r+s)^2\} - [\{s(p+q) + q(r+s)\}\{(p+q)^2 - (r+s)^2\} - 2(p+q)(r+s)(q^2 - s^2)]}{2(p+q)(r+s)(ps - qr)}\end{aligned}$$

(分子) =

$$\begin{aligned}&\{s(p+q) - q(r+s)\}\{(p+q)^2 + (r+s)^2\} - [\{s(p+q) + q(r+s)\}\{(p+q)^2 - (r+s)^2\} - 2(p+q)(r+s)(q^2 - s^2)] \\ &= s(p+q)^3 + s(p+q)(r+s)^2 - q(p+q)^2(r+s) - q(r+s)^3 - s(p+q)^3 + p(p+q)(r+s)^2 - q(p+q)^2(r+s) \\ &\quad + q(r+s)^3 + 2(p+q)(r+s)(q^2 - s^2) \\ &= 2s(p+q)(r+s)^2 - 2q(p+q)^2(r+s) + 2(p+q)(r+s)(q^2 - s^2) \\ &= 2(p+q)(r+s)\{s(r+s) - q(p+q) + (q^2 - s^2)\} = 2(p+q)(r+s)(rs - pq)\end{aligned}$$

$$\text{よって, } \cos A = \frac{2(p+q)(r+s)(rs - pq)}{2(p+q)(r+s)(ps - qr)} = \frac{rs - pq}{ps - qr}$$

$\triangle AFE$ に余弦定理を適用して

$$x^2 = p^2 + r^2 - 2pr \cos A = p^2 + r^2 - 2pr \times \frac{rs - pq}{ps - qr} = \frac{(p+r)(p-r)(ps + qr)}{ps - qr}$$

$$x > 0 \text{ より, } x = \sqrt{\frac{(p+r)(p-r)(ps + qr)}{ps - qr}}$$

以上[1], [2]より

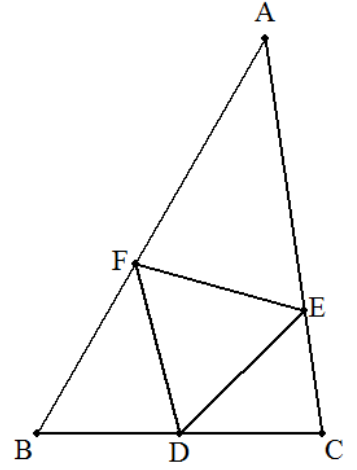
$$[1] \quad ps - qr = 0 \text{ のとき, 正三角形の 1 辺 } x = p, BC = 2p, \cos A = \frac{1}{2} \quad (A = 60^\circ)$$

$$[2] \quad ps - qr \neq 0 \text{ のとき, 正三角形の 1 辺 } x = \sqrt{\frac{(p+r)(p-r)(ps + qr)}{ps - qr}}$$

$$BC = \sqrt{\frac{p^3s + ps^3 + p^2qr + 4p^2qs + 3pq^2s - q^3r - qr^3 - pr^2s - 4qr^2s - 3qrs^2}{ps - qr}}, \quad \cos A = \frac{rs - pq}{ps - qr}$$

(2015/5/30 時岡)

△ABC について、BC の中点を D とし、
 CA 上に点 E を、AB 上に点 F を、
 △DEF が正三角形になるようにとる。
 BC = a 、CA = b 、AB = c とおくとき、
 正三角形の 1 辺を a, b, c を用いて表せ。



(解) 正三角形の 1 辺を x 、 $EC = q$ 、 $FB = s$ とおくと、 $AE = b - q$ 、 $AF = c - s$ である。

時岡の定理より、 $3(b - q)^2 + q^2 = 3(c - s)^2 + s^2 \cdots \textcircled{1}$

$$\cos B = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot s} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad \therefore \frac{a^2}{4} + s^2 - x^2 = \frac{s}{2c}(a^2 - b^2 + c^2) \cdots \textcircled{2}$$

$$\cos C = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + q^2 - x^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot q} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \therefore \frac{a^2}{4} + q^2 - x^2 = \frac{q}{2b}(a^2 + b^2 - c^2) \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{より、} 4(s^2 - q^2) = 6(cs - bq) + 3(b^2 - c^2) \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{3} \text{より、} s^2 - q^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}s - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}q \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{5} \text{を} \textcircled{4} \text{に代入すると、} 4\left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}s - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}q\right) = 6(cs - bq) + 3(b^2 - c^2)$$

$$s \text{ について解くと、} s = \frac{2c(a^2 + 4b^2 - c^2)q - 3bc(b^2 - c^2)}{2b(a^2 - b^2 + 4c^2)} \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} \text{を} \textcircled{4} \text{に代入すると、} q = \frac{b\{3(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - b^2c^2) + \sqrt{3}(-a^2 + b^2 + 2c^2)t\}}{4(-a^2 + b^2 + bc + c^2)(-a^2 + b^2 - bc + c^2)} \cdots \textcircled{7}$$

ただし、 $t = \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$ である。

⑦を③に代入すると

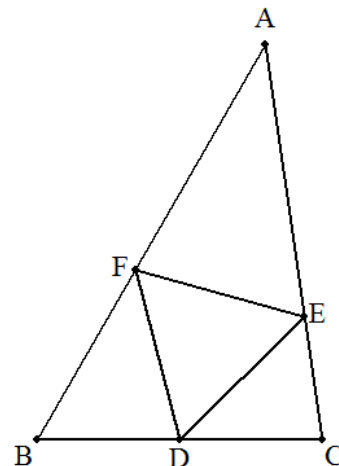
$$x = \frac{t\sqrt{a^6 - 2a^4(b^2 + c^2) + a^2(b^4 - 5b^2c^2) + 9b^2c^2(b^2 + c^2) - \sqrt{3}(-a^2 + b^2 + 2c^2)(-a^2 + 2b^2 + c^2)t}}{2\sqrt{2}(-a^2 + b^2 + bc + c^2)(-a^2 + b^2 - bc + c^2)} \cdots (\text{答})$$

$$(\text{補足}) \quad s = \frac{c\{3(a^4 - 2a^2c^2 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2) + \sqrt{3}(-a^2 + 2b^2 + c^2)t\}}{4(-a^2 + b^2 + bc + c^2)(-a^2 + b^2 - bc + c^2)}$$

【例 1】

△ABC について、BC の中点を D とし、CA 上に点 E を、AB 上に点 F を、
△DEF が正三角形になるようにとる。

BC=5, CA=7, AB=8 のとき、正三角形の 1 辺を求めよ。



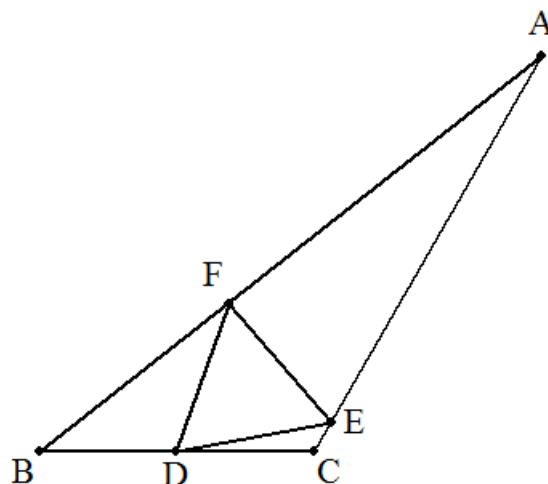
$$(\text{答}) \quad \frac{5\sqrt{97}}{16}$$

$$\text{参考: } AE = \frac{77}{16}, EC = \frac{35}{16}, AF = \frac{73}{16}, FB = \frac{55}{16}$$

【例 2】

△ABC について、BC の中点を D とし、CA 上に点 E を、AB
上に点 F を、△DEF が正三角形になるようにとる。

BC=3, CA=5, AB=7 のとき、正三角形の 1 辺を求めよ。



$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{21}}{8}$$

$$\text{参考: } AE = \frac{37}{8}, EC = \frac{3}{8}, AF = \frac{35}{8}, FB = \frac{21}{8}$$

(2015/5/31 時岡)